Compactification de Stone-Cech

Jean Pierre Mansour

29 Janvier 2022

Définition Soit X un espace topologique. Une compactification de Stone-Cech de X est un couple $(\beta, \beta X)$ tel que $\beta : X \to \beta X$ soit un plongement et $\beta(X)$ dense dans βX qui est compact. (Un plongement est un homéomorphisme entre l'espace de départ et l'ensemble de ses images)

Notation Soit X un espace topologique.
$C_B(X,\mathbb{R})$=$\{\phi : X \to \mathbb{R},\ \ \phi$ est continue et bornée dans $\mathbb{R}\}$

Proposition. *Soit X un espace topologique de Tychonoff. On correspond à chaque application ϕ de $E = C_B(X,\mathbb{R})$, un intervalle I_ϕ compact de $\mathbb{R}$ / I_ϕ soit le plus petit recouvrement de $\phi(X)$. Alors il existe un plongement*

$p : X \to \prod_{\phi\in E} I_\phi \ / \ x \in X \longrightarrow (\phi(x))_{\phi\in E}$ élément du produit indexé par E.

Théorème Si X est un espace de Tychonoff alors il admet un compactification de Stone-Cech $(\beta, \beta X)$.

Preuve. On considère le même plongement $\beta : X \to \prod_{\phi\in E} I_\phi$,
On a βX=$\overline{\beta(X)} \subset \prod_{\phi\in E} I_\phi$, ($\prod_{\phi\in E} I_\phi$ muni de la topologie initiale donc fermé, et compact par le théorème de Tychonoff)

Donc $\overline{\beta(X)}$ est compact car il est contenu dans compact qui est un produit quelconque de Hausdorff donc Hausdorff. De plus, $\beta(X)$ est dense dans βX, donc le couple $(\beta, \beta X)$ est une compactification de Stone-Cech de X.