Lemme 1 : Soit $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ deux e.v.n.

Et $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\|x\|_\infty = \|(x_1, x_2)\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$

$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

Preuve : Soit $((x_n, y_n))_n \subseteq \mathbb{R}^2$ cauchy pour $\|\cdot\|_\infty$.

Alors $\lim\limits_{\substack{p \to +\infty \\ q \to +\infty}} \|(x_p, y_p) - (x_q, y_q)\|_\infty = 0$

Donc $\|((x_p - x_q), (y_p - y_q))\|_\infty \xrightarrow[p,q \to +\infty]{} 0$

$\Rightarrow \max(|x_p - x_q|, |y_p - y_q|) \xrightarrow[p,q \to +\infty]{} 0$

$\Rightarrow |x_p - x_q| \xrightarrow[p,q \to +\infty]{} 0$ et $|y_p - y_q| \xrightarrow[p,q \to +\infty]{} 0$

Or $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet

Alors $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x \in \mathbb{R}$ et $y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (x_n, y_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ complet

De même, on peut démontrer que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ complet

$\boxed{n \geq 1}$

• Lemme 2 Soit E un e.v de dimension $n < +\infty$.
Et $(E, \|\cdot\|_E)$ e.v.n

Avec $\|x\|_E = \|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\|_E = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Alors $\varphi : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_E)$

$(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = x$

φ est linéaire, continue et bijective.

• Lemme 3 sur un e.v de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Théorème de Riesz : Un espace vectoriel de dimension finie muni de n'importe quelle norme est complet.

Preuve : Soit $(x_n)_n \subseteq (E, \|\cdot\|_E)$ Cauchy.

Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0, \|x_p - x_q\|_E \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \|\varphi(x_p^1, \ldots, x_p^n) - \varphi(x_q^1, \ldots, x_q^n)\|_E \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \|\varphi(x_p^1 - x_q^1, \ldots, x_p^n - x_q^n)\|_E \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \|(x_p^1 - x_q^1, \ldots, x_p^n - x_q^n)\|_\infty \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \|\underbrace{(x_p^1, \ldots, x_p^n)}_{\in \mathbb{R}^n} - \underbrace{(x_q^1, \ldots, x_q^n)}_{\in \mathbb{R}^n}\|_\infty \leq \varepsilon$

Alors $\left((u_p^1, \dots, u_p^n)\right)_{p \in \mathbb{N}}$ cauchy dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ qui est complet.

Donc $\left((u_p^1, \dots, u_p^n)\right)_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\Rightarrow \varphi^{-1}(u_p) \xrightarrow[p \to +\infty]{} \varphi^{-1}(u) \text{ . Avec } u_p, u \in E.$$

φ continue

$$\Longrightarrow \varphi(\varphi^{-1}(u_p)) \xrightarrow[p \to +\infty]{} \varphi(\varphi^{-1}(u))$$

$$\Rightarrow u_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} u \in E$$

Alors $(u_n)_n$ converge dans E.

Donc $(E, \|\cdot\|_E)$ est complet.

Enfin, $\dim(E) = n < +\infty$ Alors toute norme sur E est équivalente à $\|\cdot\|_E$. Donc E est complet pour n'importe quelle norme