En route vers la réduction de Jordan

Jean Pierre Mansour

28 Octobre 2021

Théorème de Cayley-Hamilton

Lemme 0.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors ${}^t com(A).A = det(A).I_n$*

Preuve. Soit $A = (a_{ij})$, ${}^t com(A) = (b_{ij})$=(A_{ij}). Avec A_{ij}=$(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ et Δ_{ij} le cofacteur de l'élément a_{ij}.
Alors ${}^t com(A)$=A_{ji}, ${}^t com(A).A = (c_{ij})$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k}\Delta_{jk}a_{ik}$$

On Remarque que $c_{jj} = det(A)$. Raisonnons sur le terme c_{ij}:
$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k}\Delta_{jk}a_{ik}$. C'est précisément le développement suivant la j-ème colonne d'une autre matrice A'.

Prêts? A'=$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \dots & \dots & a_{j-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{j+1,1} & \dots & \dots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix}$.

$c_{ij} = det(A')$. Mais i varie de 1 à n. Donc on aura deux colonnes égaux. En remplaçant les termes de la matrice (c_{ij}), on obtient l'identité.

Remarque. $det(A) = 1 \implies$ *A est inversible.*

Théorème 0.2 (Cayley-Hamilton)**.** *Soit $u \in End(E)$, E de dimension finie n et χ_u son polynôme caractéristique. Alors $\chi_u(u) = 0$*
Preuve. Soit A la matrice associée à l'endomorphisme u dans une base B que

l'on fixe. On aura $A = \mathcal{M}(u, \mathcal{B})$.
On notera B_λ *la comatrice de* $A - \lambda I_n$, $\lambda \in \mathbb{K}$. *Ainsi,*

$$^tB_\lambda(A - \lambda I_n) = det(A - \lambda I_n).I_n.$$

Il est facile de remarquer que les coefficients de B_λ *sont des polynômes de degré* $n-1$. *Par conséquent, il existe des matrices* $B_0, ..., B_{n-1}$ *à coefficients dans* $\mathbb{K}$, *tel que:*

$$^tB_\lambda = B_0 + \lambda B_1 + ... + \lambda^{n-1}B_{n-1}.$$

Par développement puis factorisation, on obtient:

$$(B_0+\lambda B_1+...+\lambda^{n-1}B_{n-1})(A-\lambda I_n) = B_0A+\lambda(B_1A-B_0)+...+\lambda^{n-1}(B_{n-1}A-Bn-2)-\lambda^n B_{n-1}.$$

En écrivant χ_u *comme polynôme de degré n:* $\chi_u(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + ... + a_n\lambda^n$, *on obtient:*

$$B_0A + \lambda(B_1A - B_0) + ... + \lambda^{n-1}(B_{n-1}A - B_{n-2}) - \lambda^n B_{n-1} = a_0I_n + a_1\lambda I_n + ... + a_n\lambda^n I_n$$

En identifiant, il en résulte le système suivant: $\begin{cases} B_0A = a_0I_n \\ B_1A - B_0 = a_1I_n \\ \vdots \\ B_{n-1}A - B_{n-2} = a_{n-1}I_n \\ -B_{n-1} = a_nI_n \end{cases}$

En multipliant l'i-ème ligne par A^{i-1}, *i=1,...,n puis additionnant toutes les lignes, on obtiendra* $\chi_u(A) = 0$.

Références

Un grand merci à Dr. Peter Haissinsky. La démonstration du théorème 0.2 est entièrement inspirée par sa méthode.